

KALAN ÖMÜR PARADOKSU VE UYGULAMALARI

Prof. Dr. Tahir HANALIOĞLU (KHANİYEV)

1. KALAN ÖMÜR ve PARADOKSLARI

❖ $\{X_n\}, n = 1, 2, \dots$ dizisi bağımsız aynı dağılıma sahip pozitif değerli rasgele değişken dizisi olsun.

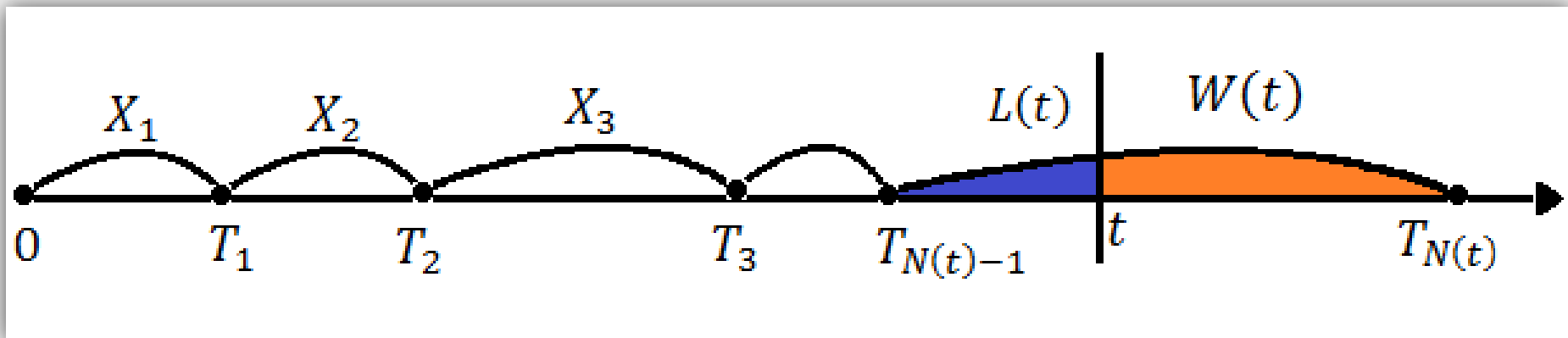
❖ Bu rasgele değişkenlerin dağılımını $F(t)$ ile gösterelim. Yani $F(t) = P\{X \leq t\}$ olsun.

$$T_0 = 0; T_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n = 1, 2, \dots$$

T_n dizisine yenileme dizisi denir.

$$N(t) = \min\{n \geq 1: T_n > t\}, t \geq 0 \quad (1)$$

❖ $N(t)$ sürecine literatürde yenileme süreci denir (Feller anlamında).



$$W(t) = T_{N(t)} - t \quad (2)$$

❖ $W(t)$ sürecine $\{X_n\}$ rasgele değişkenler dizisinin oluşturduğu yenileme sürecinin kalan ömrü veya kısaca *kalan ömür (residual waiting time)* denir.

❖ Bu $W(t)$ ' nin dağılımını $H(t, x)$ ile gösterelim. Başka bir deyişle

$$H(t, x) = F_{W(t)}(x) = P\{W(t) \leq x\} \quad (3)$$

olsun.

❖ $H(t, x)$ dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$F_{W(t)}(x) \equiv H(t, x) = \int_0^t [F(t - s + x) - F(t - s)]U\{ds\} \quad (4)$$

❖ Burada $U(t)$ ile $N(t)$ yenileme sürecinin beklenen değeri gösterilmiştir. Yani,

$$U(t) = E(N(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} F^{*n}(t) \quad (5)$$

❖ $U(t)$ fonksiyonuna literatürde *yenileme fonksiyonu* denir.

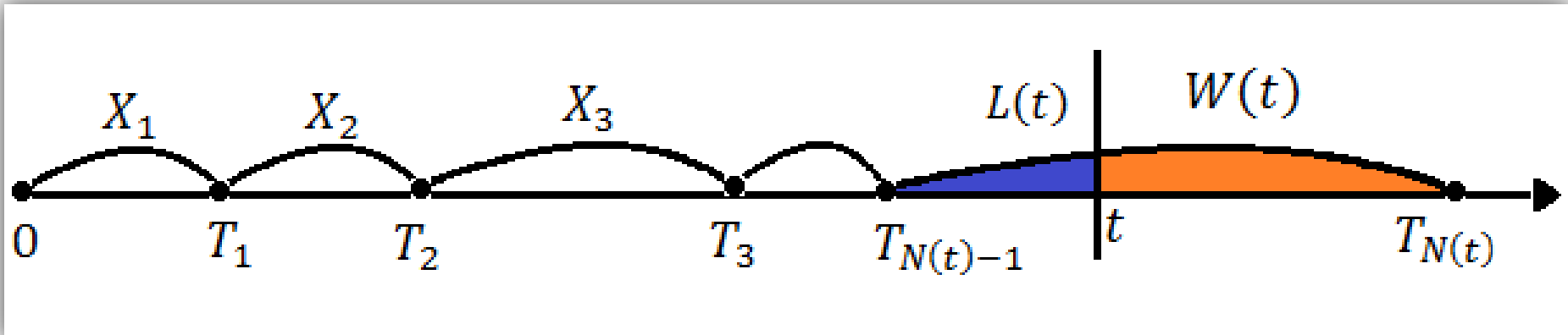
❖ (4) formülünden kalan ömrün olasılık yoğunluk fonksiyonunu

aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

$$f_{W(t)}(x) = f(t+x) + \int_0^t f(t+x-s)U'(s)ds \quad (*)$$

Örnek 1: $X_n \in \text{Üstel}(\lambda)$ ise, her $t \geq 0$ için (*) eşitliğinden aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$f_{W(t)}(x) = \lambda e^{-\lambda x} = f(x).$$



Örnek 2: $X_n \in \text{Erlang}(2; \lambda)$ olsun. Bu takdirde,

$$f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, x \geq 0; \quad U(s) = \frac{\lambda s}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} e^{-2\lambda s}$$

olur.

❖ Bunları (*) eşitliğinde göz önünde bulundurursak,

$$f_{W(t)}(x) = \frac{\lambda}{2} (1 + \lambda x) e^{-\lambda x} + \frac{\lambda}{2} (\lambda x - 1) e^{-\lambda x} e^{-2\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f_{W(t)}(x) = \frac{\lambda}{2} (1 + \lambda x) e^{-\lambda x}$$

❖ Genel durumda (*) formülünden yararlanmak çok da kolay değildir. Bu nedenle $t \rightarrow \infty$ iken kalan ömrün dağılımının fonksiyonunun limit şekli bulunmuştur.

❖ Smith' in Anahtar Yenileme Teoremine göre,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_{W(t)}(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} H(t, x) = \frac{1}{m_1} \int_0^x (1 - F(s)) ds \quad (6)$$

olur. Burada $m_1 = E(X_1)$ ' dir.

❖ (6) formülündeki limit dağılımını, notasyon kısalığı için $\pi_0(x)$ ile gösterelim:

$$\pi_0(x) \equiv \frac{1}{m_1} \int_0^x (1 - F(s)) ds \quad (7)$$

❖ $\pi_0(x)$ dağılımına *kalan ömrün limit dağılımı* denir.

❖ (7) formülünden olasılık teorisinin en meşhur paradokslarından birisi (“kalan ömür paradoksu (residual waiting time’ s paradox)”) elde edilir.

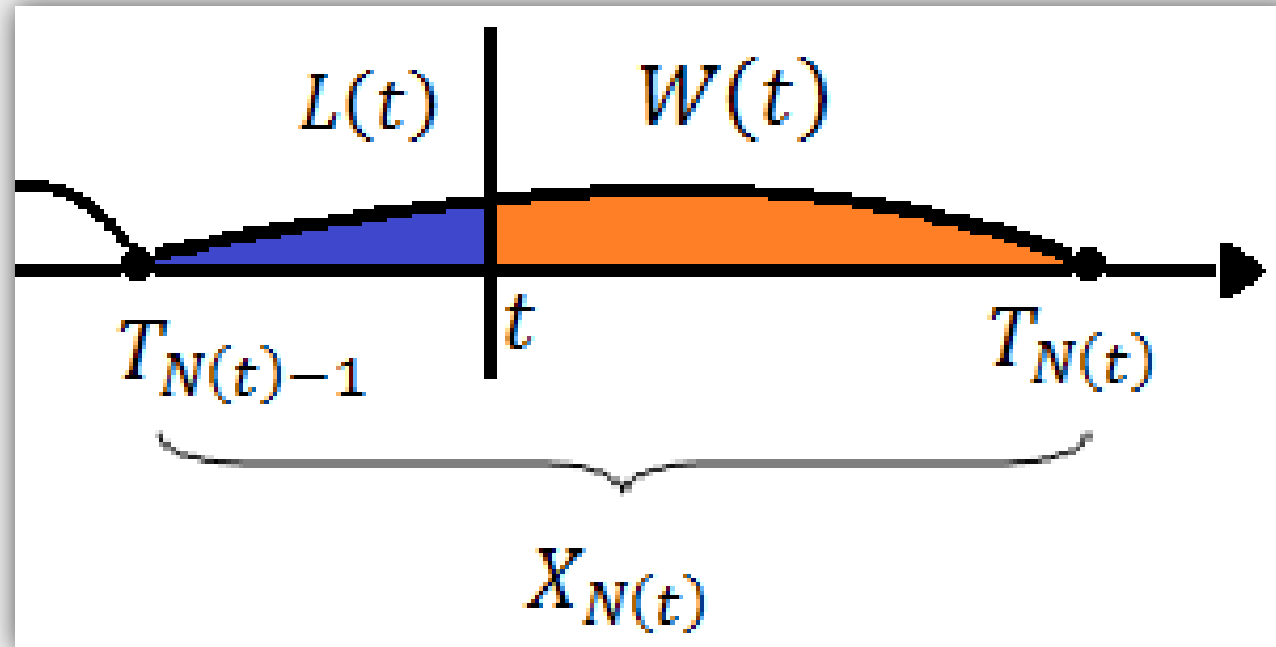
Örnek 1: $X_i \in \text{Üstel}(\lambda)$ olsun. Bu durumda $m_1 = 1/\lambda$;

$F(s) = 1 - \exp(-\lambda s), s \geq 0$ olur. Bu ifadeleri (7) formülünde yerine koyarsak aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\pi_0(x) = \lambda \int_0^x \exp(-\lambda s) ds = 1 - \exp(-\lambda x) = F(x). \quad (8)$$

Yorum:(8) formülünün anlamı şudur:

- X_n 'ler Üstel dağılıma sahip olduklarında kalan ömrün $(W(t))$ dağılımı ile tüm aralığın dağılımı birbirine eşit olur.
- Bu ise sezgilerimize ters düşen bir sonuçtur.
- Çünkü $W(t)$, $X_{N(t)}$ aralığının bir parçasıdır ve Öklid geometrisi açısından $E(W(t)) < E(X_{N(t)})$ olması gerekirdi. Hâlbuki bu durumda $E(W(t)) = 1/\lambda = E(X_{N(t)})$ ' dir.



Not 1: $L(t) = t - T_{N(t)-1}$ olsun. $L(t)$ ' ye **geçen zaman** denir (Feller). Geçen $(L(t))$ ve kalan $(W(t))$ zamanlarının ortak dağılımı $t \rightarrow \infty$ iken aşağıdaki limit dağılımına yakınsar:

$$\bar{F}_{L(t);W(t)}(x; y) \equiv P\{L(t) \geq x; W(t) \geq y\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{m_1} \int_{x+y}^{\infty} (1 - F(s)) ds.$$

$$\bar{F}_{L(t)}(x) = P\{L(t) \geq x\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{m_1} \int_x^{\infty} (1 - F(s)) ds$$

$$\bar{F}_{W(t)}(y) = P\{W(t) \geq y\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{m_1} \int_y^{\infty} (1 - F(s)) ds$$

Burada $m_1 = E(X_1) = \int_0^\infty (1 - F(s)) ds$ ' dir.

$$\Rightarrow P\{L(t) \leq x\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{m_1} \int_0^x (1 - F(s)) ds ;$$

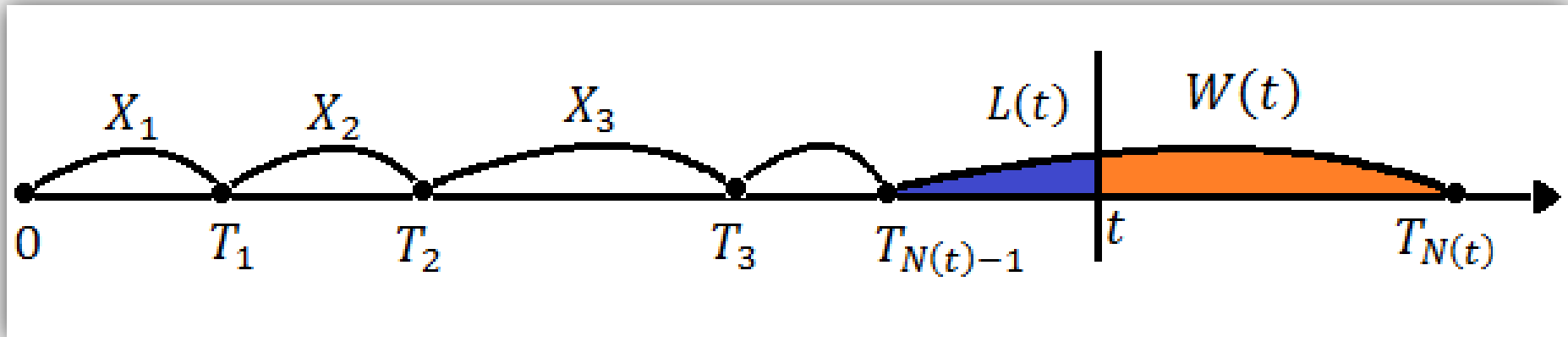
$$P\{W(t) \leq y\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{m_1} \int_0^y (1 - F(s)) ds.$$

❖ Görüldüğü üzere, $L(t)$ ve $W(t)$ aynı dağılıma sahip iki rasgele değişkendir.

❖ Özellikle, $X_1 \in \text{Üstel}(\lambda)$ olduğunda $L(t) \in \text{Üstel}(\lambda)$ ve $W(t) \in \text{Üstel}(\lambda)$ olur.

❖ Dolayısıyla, aynı bir Üstel dağılıma sahip aralığın içine 2 tane aynı parametrelili Üstel dağılıma sahip aralığı yerleştirmiş oluyoruz.

Bu ise bir paradokstur.



Not 2: $L(t)$ ve $W(t)$ rasgele değişkenleri Üstel dağılım dışında hemen hemen her zaman birbirine bağımlıdırlar. Bunu 2 örnekle gösterelim:

Örnek 1: $X_n \in \text{Üstel}(\lambda)$ olsun.

$\Rightarrow F(s) = P\{X_n \leq s\} = 1 - e^{-\lambda s}$ ve $m_1 = E(X_1) = 1/\lambda$ oluyor.

$$\Rightarrow \frac{1}{m_1} \int_{x+y}^{\infty} (1 - F(s)) ds = e^{-\lambda(x+y)} = e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}$$

oluyor.

- ❖ Başka bir deyişle, $\bar{F}_{L(t);W(t)}(x; y) = \bar{F}_{L(t)}(x)\bar{F}_{W(t)}(y)$ oluyor.
- ❖ Yani, $X_n \in \text{Üstel}(\lambda)$ olduklarında geçen ömür $(L(t))$ ile kalan ömür $(W(t))$ birbirinden **bağımsız** oluyor.

Örnek 2: $X_n \in Erlang(2; \lambda)$ olsun.

$\Rightarrow F(s) = 1 - (1 + \lambda s)e^{-\lambda s}$ ve $m_1 = E(X_1) = 2/\lambda$ olur.

$$\Rightarrow \frac{1}{m_1} \int_{x+y}^{\infty} (1 - F(s)) ds = \left[1 + \frac{\lambda}{2}(x+y) \right] e^{-\lambda(x+y)}$$

olur.

Diğer taraftan,

$$\bar{F}_{L(t)}(x) \approx \frac{1}{m_1} \int_x^{\infty} (1 - F(s)) ds = \left(1 + \frac{\lambda x}{2} \right) e^{-\lambda x};$$

$$\bar{F}_{W(t)}(y) \approx \frac{1}{m_1} \int_y^{\infty} (1 - F(s)) ds = \left(1 + \frac{\lambda y}{2} \right) e^{-\lambda y};$$

$$\Rightarrow \bar{F}_{L(t);W(t)}(x; y) \equiv \left[1 + \frac{\lambda}{2}(x + y) \right] e^{-\lambda(x+y)}$$

$$= \bar{F}_{L(t)}(x) \bar{F}_{W(t)}(y) - \frac{\lambda^2}{4} x y e^{-\lambda(x+y)};$$

$$\Rightarrow \bar{F}_{L(t);W(t)}(x; y) \neq \bar{F}_{L(t)}(x) \bar{F}_{W(t)}(y)$$

olduğu görülmektedir.

❖ Özetle, eğer $X_n \in \text{Erlang}(2; \lambda)$ ise bu takdirde, $L(t)$ ve $W(t)$ birbirinden bağımlı olduklarını gözlemliyoruz.

GEÇEN ÖMRÜN MOMENTLERİ ÜZERİNE

❖ Smith (1959) ve Rogozin (1964) çalışmasında kalan ömrün momentleri için aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

$$E(W^n) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} E(W^n(t)) = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1} \quad (9)$$

Burada $m_n = E(X_1^n), n = 1, 2, \dots$ dir.

❖ Rogozin' in bu formülünden yararlanarak birçok ilginç sonuca ulaşmak mümkündür.

❖ Bu sonuçların bazıları “Kalan ömür paradoksu” nu da desteklemektedir. Bunların bazılarını aşağıdaki özel durumlar biçiminde verelim:

Özel Durum 1: $X_n \in \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ olsun. Yani, olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilsin:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}; \quad x, \alpha, \lambda > 0;$$

$$m_n \equiv E(X_1^n) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\lambda^n \Gamma(\alpha)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$E(W^n) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{(n + 1)\Gamma(\alpha + 1)\lambda^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Buradan aşağıdaki sonuç elde ediliyor:

$$E(W) = \frac{\alpha + 1}{2\lambda}$$

Diğer taraftan $E(X_1) = \alpha/\lambda$ dır.

❖ Dolayısıyla,

$$\frac{E(W)}{E(X)} = \frac{\alpha + 1}{2\alpha} \geq 1 \iff \alpha \leq 1.$$

❖ Özetle, $\alpha \leq 1$ olduğunda Gamma dağılımının kalan ömrünün ortalama uzunluğu X_n aralıklarının ortalama uzunluklarından daha büyüktür. ***Bu bir paradokstur.***

Özel Durum 2: X_1 , (α, λ) parametrelili **Weibull** dağılımına sahip olsun. Bu durumda X_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu:
 $F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x^\alpha); x > 0; \lambda, \alpha > 0$ olur.

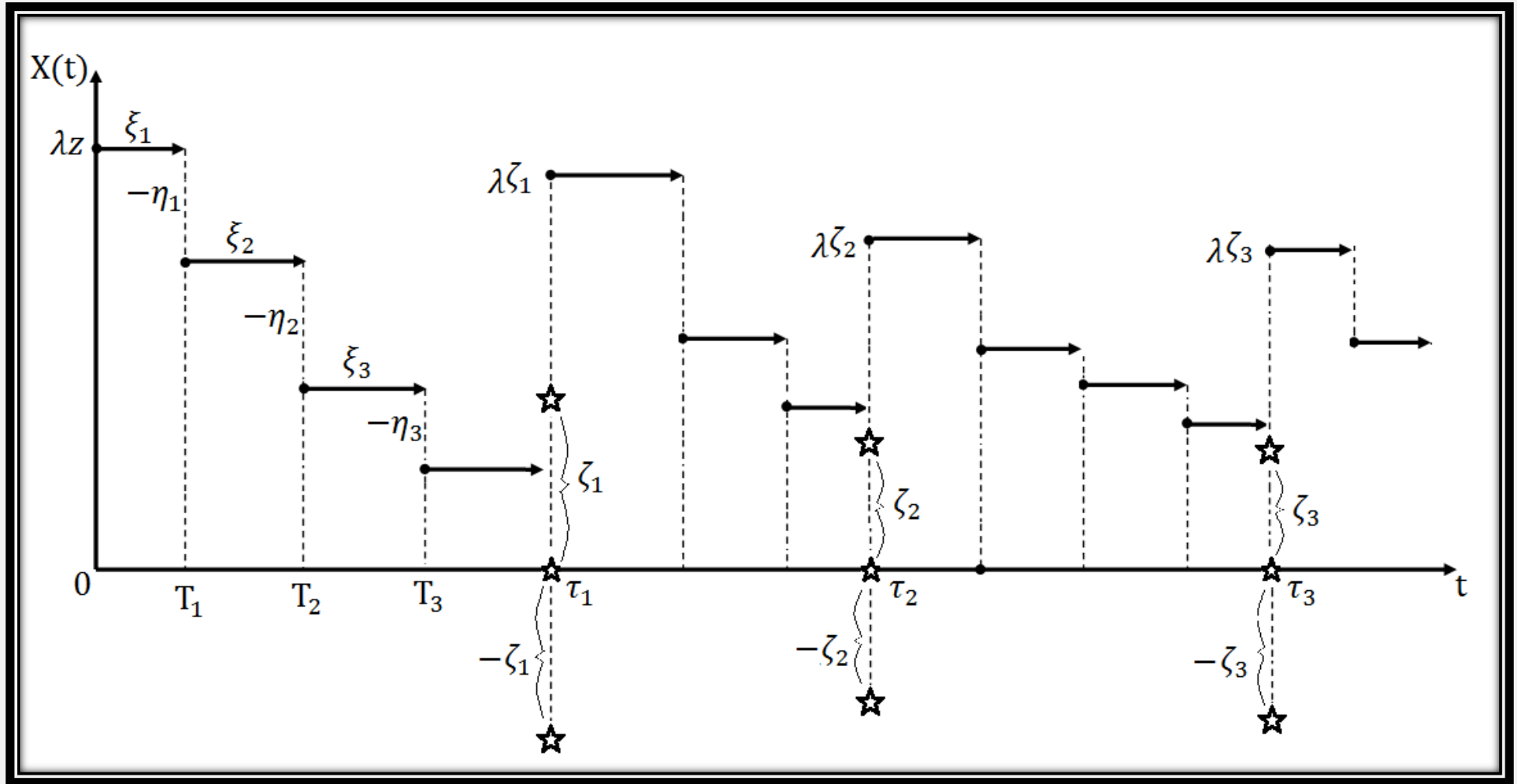
$$E(X_1) = m_1 = \frac{1/\alpha}{\lambda^{1/\alpha}} \Gamma(1/\alpha); \quad E(X_1^2) = m_1^2 = \frac{2/\alpha}{\lambda^{2/\alpha}} \Gamma(2/\alpha);$$

$$E(W) = \frac{m_2}{2m_1} = \frac{m_2}{2m_1^2} m_1 = C_F m_1 = C_F E(X_1)$$

$$C_F = \frac{m_2}{2m_1^2} = \frac{\alpha \Gamma(2/\alpha)}{\Gamma^2(1/\alpha)}; \quad \alpha = \frac{1}{2} \text{ ise } C_F = 3 \text{ olur.}$$

Özetle, $E(W) = 3E(X) \Rightarrow \text{Paradoks!!!}$

2. YANSITAN BARIYERLİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜRECİ



Teorem 2.1: Başlangıç rasgele değişkenler dizisi $\{(\xi_n, \eta_n)\}, n \geq 1$

aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) $E(\xi_1) < +\infty$, **ii)** $E(\eta_1^2) < \infty$,

iii) η_1 aritmetik olmayan rasgele değişken olsun.

❖ Bu takdirde, $X(t)$ süreci ergodiktir ve her ölçülebilir sınırlı $f(x)$ ($f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$) fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik, 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(X(u)) du$$

$$= \frac{1}{E(\tau_1(\lambda \zeta))} \int_{z=0}^{\infty} \int_{v=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} f(v) P_{\lambda z} \{ \tau_1 > t; X(t) \in dv \} dt d\pi_{\lambda}(z)$$

❖ Burada $\pi_{\lambda}(z)$ dağılımı $\{\zeta_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ Markov zincirinin ergodik dağılımıdır. ■

❖ Teorem 2.1' den elde edilen önemli çıkarımlardan birisi aşağıdaki teorem şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 2.2: Her $x > 0$ için $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(x)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q_X(x) = 1 - \frac{E\left(U_{\eta}(\lambda\zeta - x)\right)}{E\left(U_{\eta}(\lambda\zeta)\right)}$$

❖ Burada, $Q_X(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) \leq x\}$ fonksiyonu $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu; ζ rasgele değişkeni $\pi_{\lambda}(z)$ dağılımına sahip bir rasgele değişkendir.

❖ $U_{\eta}(z)$ ise $\{\eta_n, n = 1, 2, \dots\}$ rasgele değişkenler dizisinin ürettiği

yenileme fonksiyonu; $E(M(\lambda z)) \equiv \int_0^{\infty} M(\lambda z) d\pi_{\lambda}(z)$ ‘ dır. ■

$$Y_{\lambda}(t) \equiv \frac{X(t)}{\lambda}; \quad Q_Y(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P\{Y_{\lambda}(t) \leq x\};$$

$$R_0(x) \equiv (2/m_2) \int_0^x \left\{ \int_v^{\infty} (1 - F_{\eta}(u)) du \right\} dv$$

olsun.

Teorem 2.3: $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ başlangıç rasgele değişkenler dizisi aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) $E(\xi_1) < \infty$; **ii)** $E(\eta_1) > 0$; **iii)** $E(\eta_1^2) < \infty$;

iv) η_1 , aritmetik olmayan bir rasgele değişken olsun.

❖ Bu takdirde, $Y_\lambda(t)$ süreci ergodiktir ve onun ergodik dağılım fonksiyonu $(Q_Y(x))$, $\lambda \rightarrow \infty$ iken $R_0(x)$ dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsar.

❖ Yani her $x > 0$ için

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} Q_Y(x) = R_0(x) \equiv \frac{2}{m_2} \int_0^x \left\{ \int_v^\infty (1 - F_\eta(u)) du \right\} dv$$

olur. ■

Not 1: $R_0(x)$ dağılımı $\{\eta_n\}$ rasgele değişkeninin oluşturduğu yenileme sürecinin “kalan ömrünün” limit dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yeni bir yenileme sürecinin “kalan ömrünün” limit dağılımını ifade etmektedir.

Not 2: η_n ' ler $\beta > 0$ parametrelili Üstel dağılıma sahip olduklarında $R_0(x)$ limit dağılımı da β parametrelili üstel dağılıma dönüşür, yani

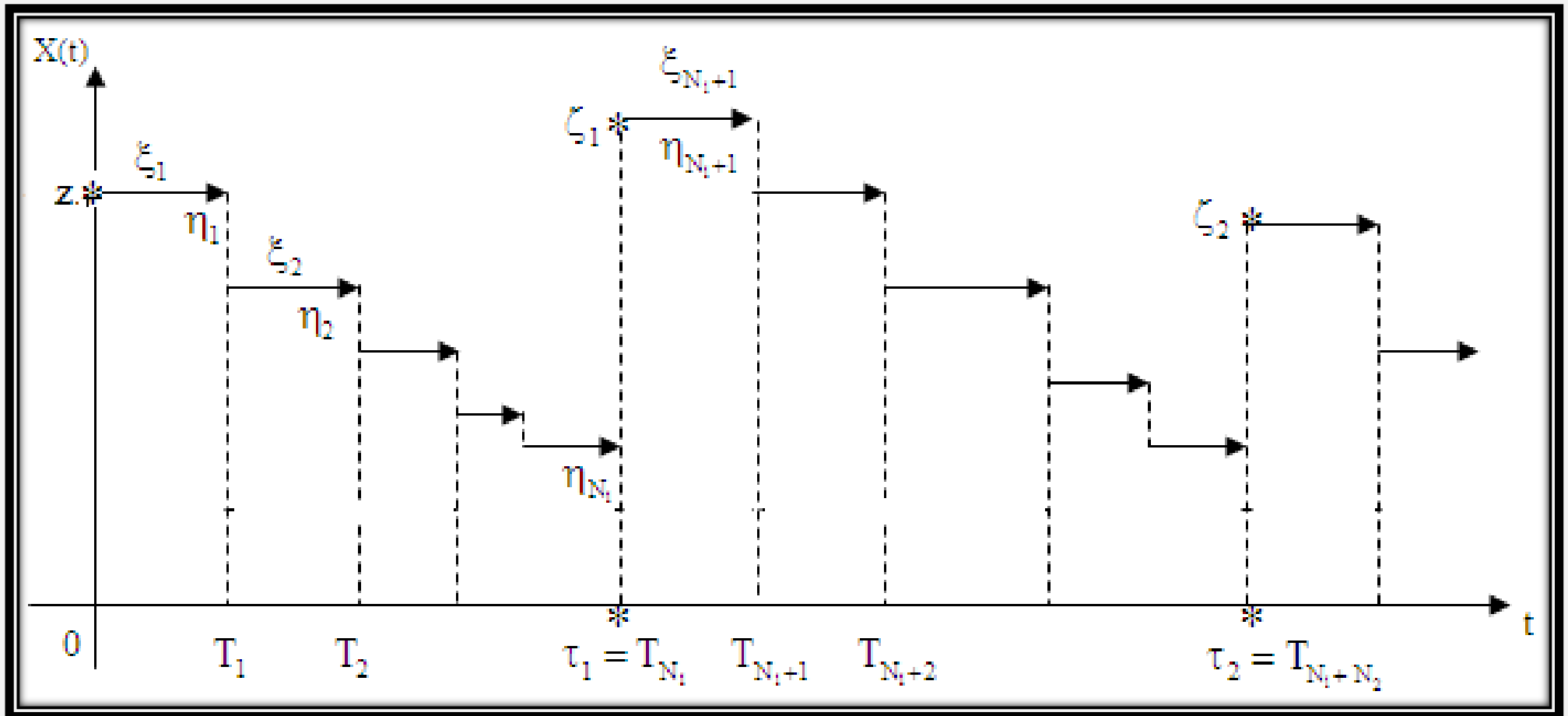
$$R_0(x) = 1 - e^{-\beta x}, \quad x \geq 0$$

olur.

Not 3: η_n ' ler ikinci mertebeden β parametrelili Erlang dağılımına sahip olduklarında $R_0(x)$ limit dağılımının aşikâr şekli aşağıdaki gibidir:

$$R_0(x) = 1 - \left(1 + \frac{\beta x}{3}\right) e^{-\beta x}, \quad x \geq 0.$$

3. NORMAL MÜDAHALELİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜRECİ



$Y_a(t) \equiv X(t)/a$ ve $Q_Y(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{Y_a(t) \leq y\}$ olsun.

Teorem 3.1.(Zayıf Yakınsama Teoremi) $a \rightarrow \infty$ iken, $\sigma/a \rightarrow 0$

koşulu altında $Y_a(t)$ sürecinin dağılım fonksiyonu $(Q_Y(y))$, $[0,1]$

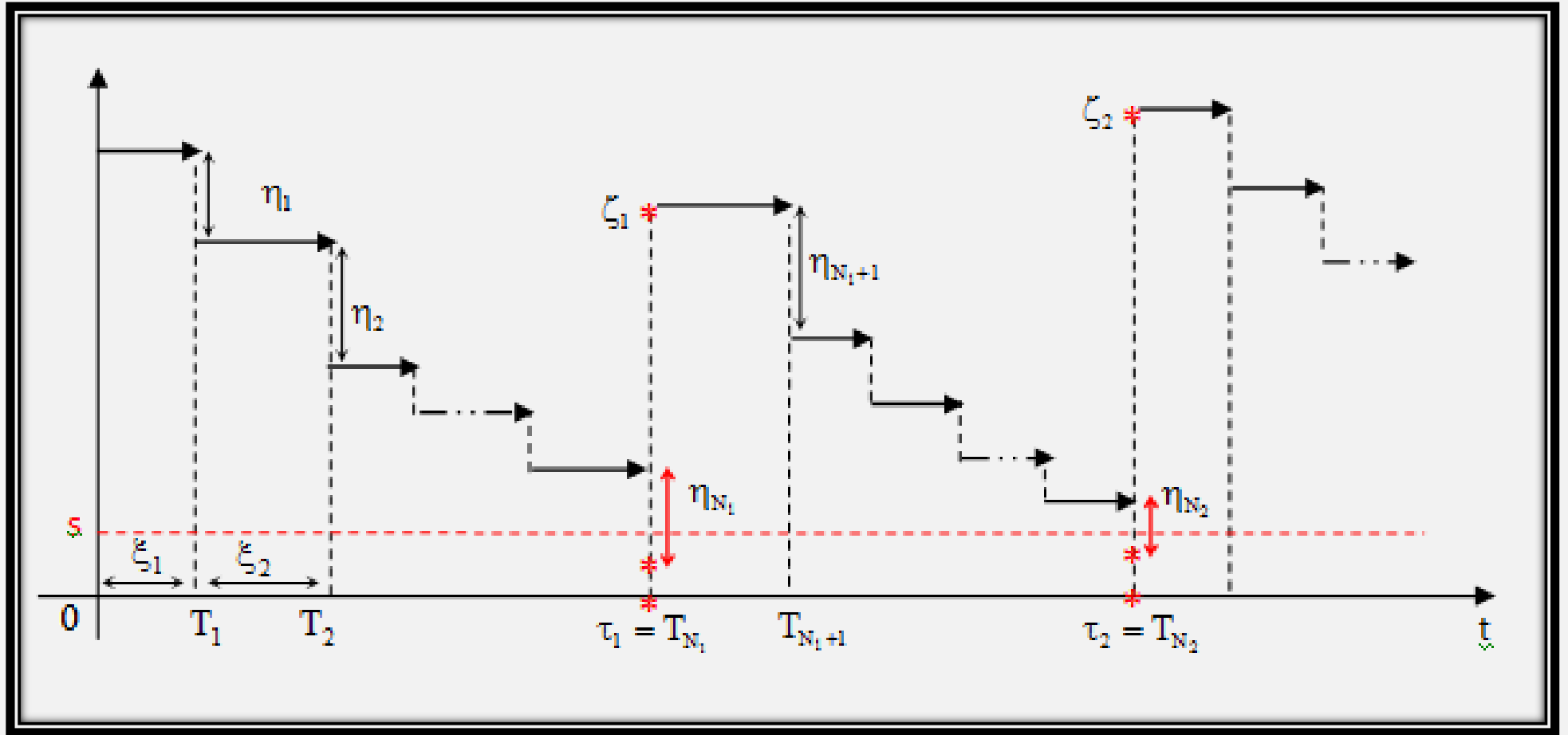
aralığında Düzgün dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsar, yani her

$y \in (0,1)$ için $a \rightarrow \infty$ iken, $Q_Y(y) \rightarrow y$ olur.

Not: $a \rightarrow \infty$ iken $\sigma/a \rightarrow 0$ sağlandığında, $Q_Y(y) \rightarrow y$ olduğuna göre, $Q_X(x) \sim x/a$ olduğu ortaya çıkar. Buradan aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Teorem 3.2: Teorem 3.1'in koşulları altında, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı, $a \rightarrow \infty$ iken, $[0, a]$ aralığında Düzgün dağılıma denktir, yani $Q_X(x) \sim x/a$ 'dır. ■

4. GAMMA MÜDAHALELİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜRECİ



$$W_{\lambda}(t) = \frac{X(t)}{\lambda}; \quad \zeta_n \in \text{Gamma}(\alpha, \lambda) \equiv G_{\alpha, \lambda}(x);$$

$$Q_W(x) = P\{W_{\lambda}(t) \leq x\}$$

Teorem 4.1: Başlangıç rasgele değişkenler dizisi $\{(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)\}, n \geq 1$ için ek olarak aşağıdaki koşullar sağlasın:

- 1) $0 < E(\zeta_1) < \infty$, 2) $E(\eta_1) > 0$, 3) $E(\eta_1^2) < \infty$,
- 4) η_1 , aritmetik olmayan bir rasgele değişkendir.
- 5) ζ_1 rasgele değişkeni $(\alpha, \lambda), \alpha > 0, \lambda > 0$ parametrelili Gamma dağılımına sahip olsun.

❖ Bu takdirde, $\alpha > 1$ için $\lambda \rightarrow 0$ iken $W_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$Q_{W_\lambda}(x) = R_\alpha(x) + \frac{m_2}{2m_1\alpha} \left(G_{\alpha,1}(x) - R_\alpha(x) \right) \lambda + o(\lambda).$$

❖ Burada $m_k = E(\eta_1^k)$, $k = 1,2$; $R_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \left(1 - G_{\alpha,1}(t) \right) dt$;

$$G_{\alpha,1}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt \text{ 'dır.}$$

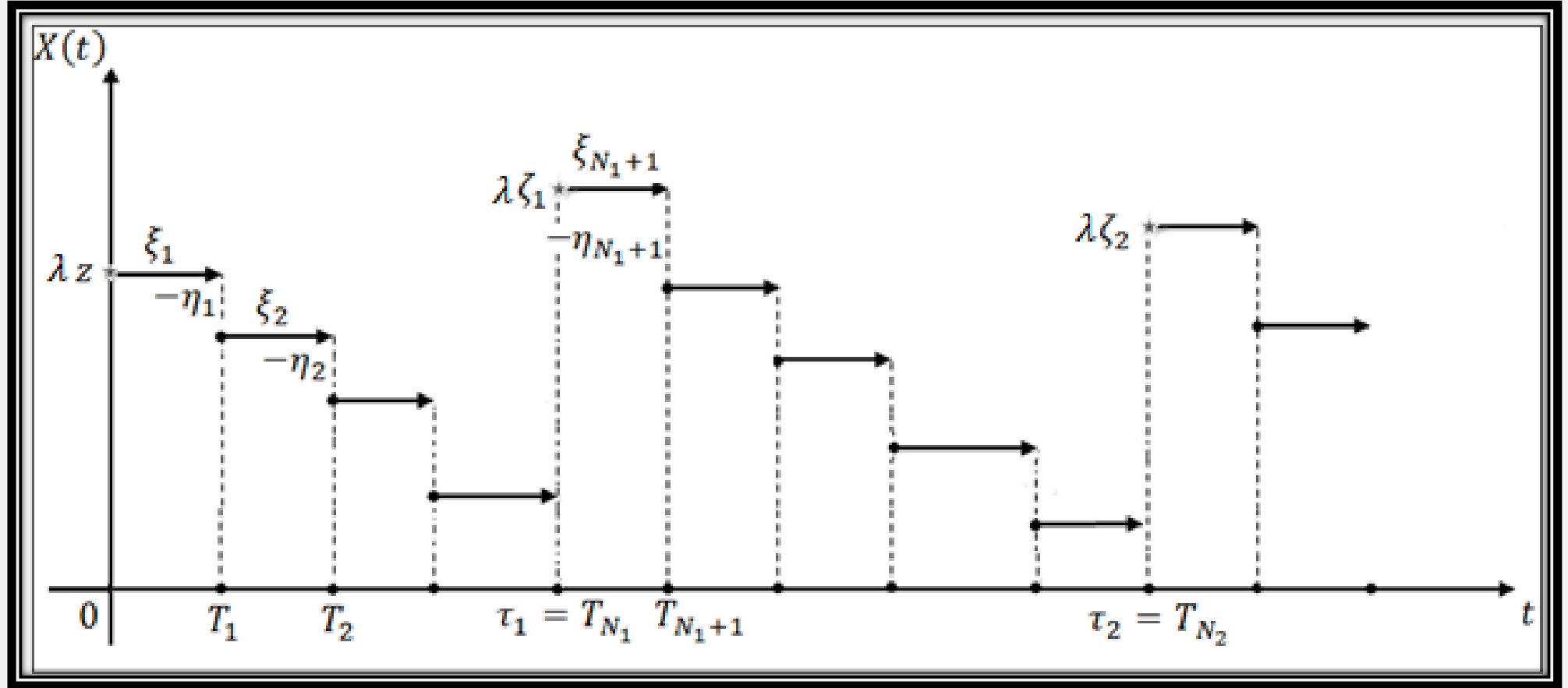
Teorem 4.2. Teorem 4.1'in koşulları sağlansın. Bu takdirde, her $x \geq 0$ ve $\alpha > 1$ için $W_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu, $R_\alpha(x)$ dağılım fonksiyonuna yakınsamaktadır:

$$Q_{W_\lambda}(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} R_\alpha(x).$$

$$R_\alpha(x) \equiv \frac{1}{\alpha} \int_0^x (1 - G_{\alpha,1}(t)) dt$$

$$G_{\alpha,1}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

5. GENEL MÜDAHALELİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜRECİ İÇİN ASİMTOTİK YAKLAŞIM



Teorem 5.1: Aşağıdaki koşullar sağlanmış olsun:

$$(i)\pi(0) = 0; \quad (ii)m_2 = E(\eta_1^2) < +\infty; \quad (iii)E(\zeta_1^{n+1}) < +\infty$$

Bu takdirde, $X(t)$ sürecinin n . ergodik momentinin $\lambda \rightarrow \infty$ iken, asimtotik açılımı aşağıdaki gibidir:

$$E(X^n) = \hat{\beta}_n \lambda^n + cm_1 \frac{(\beta_n - \hat{\beta}_n)}{\beta_1} \lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}).$$

$$\text{Burada, } \hat{\beta}_n = \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}, \beta_n = E(\zeta_1^n), \quad c = \frac{m_2}{2m_1^2}, m_n = E(\eta_1^n),$$

$$n = 1, 2, \dots \text{dır.}$$

Not 1:

$$\hat{\beta}_n = \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$$

katsayısı, ζ_n rasgele değişkenlerinin oluşturduğu yenileme sürecinin kalan ömrünün limit dağılımının n. momentini göstermektedir.

Örnek 5.1: Kesikli şans karışıklı müdahaleyi ifade eden ζ_n , rasgele değişkeni $[0,1]$ aralığında Düzgün dağılıma sahip olup, $s = 0$, $\lambda = S$ olsun. Bu durumda, (s, S) tipli envanter modelin n. ergodik momenti için $S \rightarrow \infty$ asimtotik açılım aşağıdaki gibidir:

$$E(X^n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} S^n + cm_1 \frac{2n}{(n+1)(n+2)} S^{n-1} + o(S^{n-1}).$$

Not 2:

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

katsayısı, $[0,1]$ aralığında Düzgün dağılıma sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme sürecinin kalan ömrünün limit dağılımının n . momentlerini ifade etmektedir.

6. TUTAN BARIYERLİ RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİ

$$Y_\lambda(t) \equiv \frac{X(t)}{\lambda}; \quad \varphi_X(\alpha) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} E(\exp(i\alpha X(t)));$$

$$\varphi_Y(\alpha) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} E(\exp(i\alpha Y_\lambda(t)))$$

Teorem 6.1. Ergodik Teoremin koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, $Y_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu, $\lambda \rightarrow \infty$ iken, aşağıdaki limit karakteristik fonksiyonuna $(\varphi_0(\alpha))$ yakınsar, $\lambda \rightarrow \infty$ iken;

$$\varphi_Y(\alpha) \rightarrow \varphi_0(\alpha) \equiv \frac{\varphi_\zeta(\alpha) - 1}{i\alpha E(\zeta_1)}, \alpha \neq 0$$

❖ Burada $\varphi_{\zeta}(\alpha)$, ζ_1 rasgele değişkenin karakteristik fonksiyonu;
 $E(\zeta_1)$ ise ζ_1 'in beklenen değeridir.

İspat 6.1:

$$\varphi_X(\alpha) = \frac{1}{E(N_1(\lambda\zeta_1)) + K} \int_{z=0}^{\infty} e^{i\alpha\lambda z} \frac{\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\alpha) - 1}{\varphi_{\eta}(-\alpha) - 1} d\pi(z) \\ + \frac{K}{E(N_1(\lambda\zeta_1)) + K} \int_{z=0}^{\infty} e^{i\alpha\lambda z} \varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\alpha) d\pi(z), \quad \alpha \in R \setminus \{0\}$$

$$P\{\zeta_n \leq z\} \equiv \pi(z) = \frac{F(0) - F(-z)}{F(0)}; \quad F(z) = P\{\eta_n \leq z\}.$$

Önerme 6.1. $\varphi_0(\alpha)$ bir karakteristik fonksiyonudur.

Karakteristik fonksiyonlarının bire-bir özelliğine göre (bkz., Lukacs (1970)), bu o demektir ki,

$$\varphi_0(\alpha) = \frac{\varphi_{\zeta}(\alpha) - 1}{i\alpha E(\zeta_1)}$$

ifadesi $G(x)$ dağılımının karakteristik fonksiyonudur. ■

Teorem 6.2. $Y_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılımı $Q_Y(x)$, $\lambda \rightarrow \infty$ iken $G(x)$ dağılımına zayıf yakınsar, yani her $x > 0$ için:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} Q_Y(x) = G(x)$$

olur. Burada

$$G(x) \equiv \frac{1}{E(\zeta_1)} \int_0^x (1 - \pi_\zeta(z)) d(z)$$

dağılım fonksiyonu, $\{\zeta_n\}$ dizisinin ürettiği yenileme süreci için **"Kalan Ömrünün"** limit dağılımıdır.

Sonuç 6.1: $\pi_z(z) = \frac{F(0)-F(-z)}{F(0)}$ eşitliği $G(x)$ için yukarıda elde

edilen ifadede yerine yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$G(x) = \frac{\int_0^x F_{\eta}(-z)dz}{\int_0^{\infty} F_{\eta}(-z)dz}, \quad x \geq 0. \blacksquare$$

Kaynak

Feller W. (1971), *An Introduction to Probability Theory and Its Application*, Vol. II, John Wiley and Sons, New York.

TEŞEKKÜRLER